Alumno________________________________________________ nº matrícula: ☐☐☐☐☐

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse *en la hoja del enunciado*: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador. 6) No se hacen aclaraciones.

---

**Ejercicio nº 2.-** En el plano euclídeo $\mathbb{E}_2$, dotado de una referencia cartesiana {O; $(x, y)$}, se introducen unas coordenadas curvilíneas, $(u, v)$, para los puntos del primer cuadrante, $\{x>0, y>0\}$, de manera que $\{x = \sqrt{u+v}$ , $y = \sqrt{u-v}\}$. Se pide:

1) Deducir, en la base canónica cartesiana $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$, la base natural, $\{\vec{g}_u, \vec{g}_v\}$, y la recíproca, $\{\vec{g}^u, \vec{g}^v\}$, la matriz de Gram del sistema, $G$, su determinante y el dominio de regularidad de sistema. [3 puntos].

2) Deducir la ecuación cartesiana e identificar como curvas las líneas coordenadas del sistema que pasan por un punto genérico de coordenadas curvilíneas $(u_0, v_0)$. Particularizar para el punto $(u_0, v_0) = (3, 1)$ y dibujarlas en ese caso. [2 puntos]

3) Calcular los símbolos de Christoffel del sistema disponiéndolos en forma matricial $[\Gamma^k_{ij}(u, v)]$ de modo que k = índice de matriz, i = índice de fila, j = índice de columna. [2 puntos]

4) Dado el campo vectorial $\vec{f} = u^2\vec{g}_u + 2uv\vec{g}_v$, determinar su divergencia, su rotacional (en el espacio $\mathbb{E}_3$ que alberga al plano $\mathbb{E}_2$ del problema) y las componentes contravariantes de su derivada covariante respecto de $u$. [3 puntos]

---

**Solución:** •1) Se tiene $\underline{r}(u, v) = \sqrt{u+v}\,\underline{\mathrm{i}} + \sqrt{u-v}\,\underline{\mathrm{j}}$, de donde se deduce la base natural derivando:

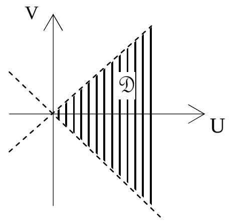
$$\underline{g}_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u+v}}\underline{\mathrm{i}} + \frac{1}{2\sqrt{u-v}}\underline{\mathrm{j}}\ ;\ \underline{g}_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{u+v}}\underline{\mathrm{i}} - \frac{1}{2\sqrt{u-v}}\underline{\mathrm{j}};\ J(u, v) = \begin{bmatrix} | & | \\ \underline{g}_u & \underline{g}_v \\ | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{\mathrm{i}},\underline{\mathrm{j}}\}} = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u+v}} & \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u-v}} & \frac{-1}{2\sqrt{u-v}} \end{bmatrix};$$

de donde: $\sqrt{\mathrm{g}} = \det(J) = \frac{-1}{2\sqrt{u^2-v^2}}$ (base orientada negativamente);

y además
$$J^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} \sqrt{u+v} & \sqrt{u-v} \\ \sqrt{u+v} & -\sqrt{u-v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \underline{g}^u & - \\ - & \underline{g}^v & - \end{bmatrix}_{\{\underline{\mathrm{i}},\underline{\mathrm{j}}\}} \Rightarrow \begin{cases} \underline{g}^u = \sqrt{u+v}\,\underline{\mathrm{i}} + \sqrt{u-v}\,\underline{\mathrm{j}} \\ \underline{g}^v = \sqrt{u+v}\,\underline{\mathrm{i}} - \sqrt{u-v}\,\underline{\mathrm{j}} \end{cases}$$

La matriz de Gram del sistema es:

$$G(u, v) = [\underline{g}_{\mathrm{i}}\cdot\underline{g}_{\mathrm{j}}] = \begin{bmatrix} \frac{u}{2(u^2-v^2)} & \frac{-v}{2(u^2-v^2)} \\ \frac{-v}{2(u^2-v^2)} & \frac{u}{2(u^2-v^2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2(u^2-v^2)}\begin{bmatrix} u & -v \\ -v & u \end{bmatrix};\ \mathrm{g} = \det G = \frac{1}{4(u^2-v^2)}$$

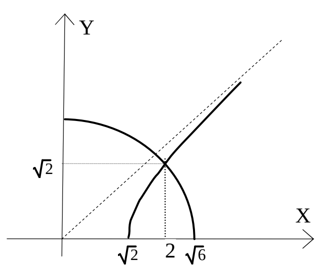



El dominio de regularidad lo constituyen los puntos $(u, v)$ para los que están definidas biunívocamente las coordenadas cartesianas, existe la base natural y es, efectivamente, base. Se exigen, pues, las condiciones:

$u + v > 0$, $u - v > 0$ (para la determinación de $(x, y)$ y de la base), $\frac{1}{2\sqrt{u^2-v^2}} \neq 0$ (para que sean base) lo que conduce a: $(u, v) \in \mathfrak{D} = \{(u, v)\in\mathbb{R}^2 : u > |v| > 0\}$ (figura) #.

•2) Denotamos $\phi$: $\mathfrak{D} \to \Omega = \{(x, y)\in\{x>0, y>0\}\subset\mathbb{E}_2 \ /\ x = \sqrt{u+v},\ y = \sqrt{u-v}\}$, la relación que introduce las coordenadas $(u, v)$ en el primer cuadrante de $\mathbb{E}_2$, como indica el enunciado. Así:

i) L.C.$u$ por $(u_0, v_0) = \phi(\{u = t+u_0, v = v_0\}) = \{(x, y) \ /\ x = \sqrt{t+u_0+v_0}\ ,\ y = \sqrt{t+u_0-v_0}\}$




y para identificar la curva, eliminamos $t$, observando que $x^2-y^2 = 2v_0 =$ cte. $\Rightarrow$ L.C.$u$ es el arco de *hipérbola* $\left\{\frac{x^2}{2v_0} - \frac{y^2}{2v_0} = 1; x > 0, y > 0\right\}$ de centro O, y asíntota a la diagonal principal;

ii) L.C.$v$ por $(u_0, v_0) = \phi(\{u = u_0, v = t + v_0\}) = \{(x, y) \ /\ x = \sqrt{u_0+t+v_0}\ ,\ y = \sqrt{u_0-t-v_0}\}$

y eliminamos $t$ observando ahora que $x^2+y^2 = 2u_0 =$ cte. $\Rightarrow$ L.C. $v$ es el arco de *circunferencia* $\{x^2 + y^2 = 2u_0; x > 0, y > 0\}$ de centro O y radio $\sqrt{2u_0}$ .

En el punto correspondiente a $(u_0,v_0) = (3,1)$, es decir, en $(x_0, y_0) = (2,\sqrt{2})$ resultan los arcos en el primer cuadrante de las curvas

L.C.$u(3,1)$: $\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1;\ x > 0, y > 0\right\}$ , L.C.$v(3,1)$: $\{x^2 + y^2 = 6; x > 0, y > 0\}$ (figura) #.

•3) Para calcular los símbolos de Christoffel directamente en la disposición pedida se aplica $[\Gamma^k{}_{ij}] = J^{-1}\cdot \frac{\partial J}{\partial u^j}$, de manera que se calculan las derivadas de la matriz jacobiana $J(u, v)$ obtenida en 1):

$$\frac{\partial J}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4\sqrt{u+v}^3} & \frac{-1}{4\sqrt{u+v}^3} \\ \frac{-1}{4\sqrt{u-v}^3} & \frac{1}{4\sqrt{u-v}^3} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial J}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4\sqrt{u+v}^3} & \frac{-1}{4\sqrt{u+v}^3} \\ \frac{1}{4\sqrt{u-v}^3} & \frac{-1}{4\sqrt{u-v}^3} \end{bmatrix}$$

Y efectuamos:

$$[\Gamma^k{}_{i1}] = J^{-1}\cdot \frac{\partial J}{\partial u} = \begin{bmatrix} \sqrt{u+v} & \sqrt{u-v} \\ \sqrt{u+v} & -\sqrt{u-v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{4\sqrt{u+v}^3} & \frac{-1}{4\sqrt{u+v}^3} \\ \frac{-1}{4\sqrt{u-v}^3} & \frac{1}{4\sqrt{u-v}^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4(u+v)} - \frac{1}{4(u-v)} & \frac{-1}{4(u+v)} + \frac{1}{4(u-v)} \\ \frac{-1}{4(u+v)} + \frac{1}{4(u-v)} & \frac{-1}{4(u+v)} - \frac{1}{4(u-v)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-u}{2(u^2-v^2)} & \frac{v}{2(u^2-v^2)} \\ \frac{v}{2(u^2-v^2)} & \frac{-u}{2(u^2-v^2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2(u^2-v^2)} \begin{bmatrix} -u & v \\ v & -u \end{bmatrix}$$

$$[\Gamma^k{}_{i2}] = J^{-1}\cdot \frac{\partial J}{\partial v} = \begin{bmatrix} \sqrt{u+v} & \sqrt{u-v} \\ \sqrt{u+v} & -\sqrt{u-v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{4\sqrt{u+v}^3} & \frac{-1}{4\sqrt{u+v}^3} \\ \frac{1}{4\sqrt{u-v}^3} & \frac{-1}{4\sqrt{u-v}^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4(u+v)} + \frac{1}{4(u-v)} & \frac{-1}{4(u+v)} - \frac{1}{4(u-v)} \\ \frac{-1}{4(u+v)} - \frac{1}{4(u-v)} & \frac{-1}{4(u+v)} + \frac{1}{4(u-v)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{2(u^2-v^2)} & \frac{-u}{2(u^2-v^2)} \\ \frac{-u}{2(u^2-v^2)} & \frac{v}{2(u^2-v^2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2(u^2-v^2)} \begin{bmatrix} v & -u \\ -u & v \end{bmatrix}$$

Para rescribirlos en la disposición pedida deben disponerse en $[\Gamma^1{}_{ij}]$ las dos primeras filas de las matrices anteriores en columnas; y las dos segundas filas en las columnas de $[\Gamma^2{}_{ij}]$. Pero esto produce el mismo resultado (singularmente en este caso):

$$[\Gamma^1{}_{ij}] = \frac{1}{2(u^2-v^2)} \begin{bmatrix} -u & v \\ v & -u \end{bmatrix}; \; [\Gamma^2{}_{ij}] = \frac{1}{2(u^2-v^2)} \begin{bmatrix} v & -u \\ -u & v \end{bmatrix} \qquad \#.$$

•4) i) Se da el campo en contras curvilíneas, $\underline{f} = u^2\underline{g}_u + 2uv\underline{g}_v$ ; para la *divergencia* se aplica

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{f} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sqrt{g}\, f^i\right)\right] = \cancel{2}\sqrt{u^2-v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cancel{4}1}{\cancel{2}\sqrt{u^2-v^2}}u^2\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\cancel{4}1}{\cancel{2}\sqrt{u^2-v^2}}2uv\right)\right] =$$

$$= \sqrt{u^2-v^2}\left[\frac{2u\sqrt{u^2-v^2} - u^2\frac{\cancel{2}u}{\cancel{2}\sqrt{u^2-v^2}}}{(u^2-v^2)} + \frac{2u\sqrt{u^2-v^2} - 2uv\frac{-\cancel{2}v}{\cancel{2}\sqrt{u^2-v^2}}}{(u^2-v^2)}\right] = \cancel{\sqrt{u^2-v^2}}\left[\frac{\frac{2u^3-2uv^2-u^3}{\cancel{\sqrt{u^2-v^2}}} + \frac{2u^3-2uv^2+2uv^2}{\cancel{\sqrt{u^2-v^2}}}}{(u^2-v^2)}\right] ...= \frac{3u^3-2uv^2}{u^2-v^2}$$

ii) Para el *rotacional*, se pasa primero a covas el campo a covas:

$$\begin{bmatrix} f_u \\ f_v \end{bmatrix} = G\cdot\begin{bmatrix} f^u \\ f^v \end{bmatrix} = \frac{1}{2(u^2-v^2)}\begin{bmatrix} u & -v \\ -v & u \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u^2 \\ 2uv \end{bmatrix} = \frac{1}{2(u^2-v^2)}\begin{bmatrix} u^3-2uv^2 \\ u^2v \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{f} = \frac{1}{2(u^2-v^2)}\left[(u^3-2uv^2)\underline{g}^u + u^2v\underline{g}^v\right]$$

De esta manera:

$$\underline{\nabla}\times\underline{f} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \underline{g}_u & \underline{g}_v & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_u & f_v & 0 \end{vmatrix} = -\cancel{2}\sqrt{u^2-v^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2v}{\cancel{2}(u^2-v^2)}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u^3-2uv^2}{\cancel{2}(u^2-v^2)}\right)\right]\underline{k} = -\sqrt{u^2-v^2}\left[\frac{2u^3v - 2uv^3 - \cancel{2u^3v} - (-4u^3v + \cancel{4uv^3} + 2u^3v - \cancel{4uv^3})}{(u^2-v^2)^2}\right]\underline{k} =$$

$$= -\sqrt{u^2-v^2}\left[\frac{2u^3v-2uv^3}{(u^2-v^2)^2}\right]\underline{k} = -\sqrt{u^2-v^2}\,\frac{2uv\,\cancel{(u^2-v^2)}}{(u^2-v^2)^{\cancel{2}}}\,\underline{k} = \frac{-2uv}{\sqrt{u^2-v^2}}\,\underline{k}$$

iii) Para la derivada de $\underline{f}$ en contras, efectuamos la *derivada covariante* de $\underline{f}$ en contras:

$$\frac{\partial\underline{f}}{\partial u} = f^i{}_{,u}\underline{g}_i = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u} + f^h\Gamma^i{}_{h1}\right)\underline{g}_i \Rightarrow \begin{bmatrix} f^1{}_{,u} \\ f^2{}_{,u} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{bmatrix} u^2 \\ 2uv \end{bmatrix} + \frac{1}{2(u^2-v^2)}\begin{bmatrix} -u & v \\ v & -u \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u^2 \\ 2uv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u \\ 2v \end{bmatrix} + \frac{1}{2(u^2-v^2)}\begin{bmatrix} -u^3+2uv^2 \\ u^2v-2u^2v \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial\underline{f}}{\partial u} = \left(2u + \frac{-u^3+2uv^2}{2(u^2-v^2)}\right)\underline{g}_u + \left(2v - \frac{u^2v}{2(u^2-v^2)}\right)\underline{g}_v \qquad \#.$$